SF1624 Algebra och geometri

Tredje föreläsningen

Mats Boij

Institutionen för matematik
KTH

2 november, 2009

Faktorsatsen

Definition

α är ett nollställe till polynomet $f(x)$ om $f(\alpha) = 0$. Då kallas $x = \alpha$ för en rot till polynomekvationen

$$f(x) = 0.$$

Sats (Faktorsatsen)

α är ett nollställe till polynomet $f(x)$ om och endast om $f(x)$ är delbart med $(x - \alpha)$.

Exempel

Vi såg att -1 inte är ett nollställe till $f(x) = x^2 + 3x + 1$ eftersom resten vid division med $(x + 1)$ var $r(x) = -1 \neq 0$. Däremot är -1 ett nollställe till $f(x) = x^3 - 1$ eftersom

$$f(x) = x^3 - 1 = (x^2 - x + 1)(x + 1).$$

Algebrans fundamentalsats

Sats

Varje polynom av grad minst ett har ett komplext nollställe.

Genom att använda detta tillsammans med faktorsatsen och polynomdivision får vi:

Korollarium

Varje polyom kan faktoriseras över de komplexa talen:

$$f(x) = a(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_n)$$

där $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ *är komplexa tal.*

Reella polynom

Definition

Om koefficienterna i polynomet är reella tal kallas polynomet för ett reellt polynom.

Sats

De komplexa nollställena till ett reellt polynom förekommer i konjugerade par.

Bevis.

Vi kan se det genom att konjugera hela polynomet. Eftersom koefficienterna är reella är

$$\overline{f(z)} = f(\overline{z})$$

och därmed är

$$f(z) = 0 \iff f(\overline{z}) = 0.$$

□

Heltalspolynom

Definition

Om koefficienterna i polynomet är heltal kallas polynomet för ett heltalspolynom.

Sats

Om p/q är ett rationellt nollställe till ett heltalspolynom $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ och p och q saknar gemensamma delare så gäller att p delar a_0 och att q delar a_n.

Bevis.

Om vi sätter in $x = p/q$ och multiplicerar med q^n får vi ekvationen

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \cdots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0.$$

Alla termer delbara med p ger att a_0 måste vara delbar med p och alla termer delbara med q ger att a_n är delbar med q. $\square$

Induktionsprincipen

Induktionsprincipen säger att om

- P_1 gäller och (basfallet)
- $P_n \Rightarrow P_{n+1}$ gäller för alla $n \geq 1$ (Induktionssteget)

så kan vi dra slutsatsen:

- P_n gäller för alla $n \geq 1$.

Det svåra brukar vara att förstå vad som menas med symbolerna i detta.

Exempel

- P_n = ”Summan $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1)$ är lika med n^2”
- P_n = ”Talet $n(n+1)(n+2)$ är delbart med 6”
- P_n = ”Divisionsalgoritmen fungerar om $f(x)$ har grad n.

Induktionssteget

När vi ska bevisa induktionssteget, $P_n \Rightarrow P_{n+1}$, säger vi ofta att vi gör ett induktionsantagande:

- Antag att P_n gäller för $n = k$.

Sedan använder vi detta för att bevisa att i så fall gäller även P_n för $n = k + 1$.

Exempel

Antag att $1 + 3 + \cdots + (2k - 1) = k^2$. Vi får då att

$$
\begin{aligned}
& 1 + 3 + 5 + \cdots + (2(k+1) - 1) \\
& = 1 + 3 + \cdots + (2k - 1) + (2k + 1) \\
& = [\textit{induktionsantagandet}] = k^2 + (2k + 1) \\
& = [\textit{kvadreringsregeln}] = (k + 1)^2
\end{aligned}
$$

Vi har nu visat att $1 + 3 + \cdots + (2n - 1) = n^2$ gäller för $n = k + 1$ om det gäller för $n = k$.

Basfallet

Även om vi lyckas bevisa induktionssteget, kan påståendet vara helt fel om vi inte lyckas visa det i basfallet, P_1.

Exempel

Vi hade lyckats lika bra med induktionssteget om vi hade antagit att $1 + 3 + \cdots + (2k - 1) = k^2 + 1$, men när vi sätter in $n = 1$ får vi

$$P_1 = \text{"Summan 1 är lika med } 1^2 + 1\text{"}$$

vilket inte stämmer.
Däremot stämmer det bra med vårt ursprungliga påstående

$$P_1 = \text{"Summan 1 är lika med } 1^2\text{"}$$